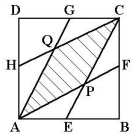
1991. évi verseny, 1. nap

1. Egy sakkversenyen minden játékos egyszer játszik mindenkivel. Eddig 25 játszmát fejeztek be összesen, és még mindenkinek 4 játszmája van hátra. Hány sakkozó vesz részt a versenyen?

2. Egy táblára fel volt írva egy 14-jegyű szám, de letörölték és csak annyi maradt fenn, hogy a negyedik jegy 9-es, a 12. pedig 7-es volt. Jancsi még arra is emlékezett, hogy a szám bármely három egymást követő jegyének összege 20 volt. Milyen szám állott a táblán?

3. Igazold, hogy $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \ldots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$.

4. Az egységoldalú $ABCD$ négyzet oldalainak felezőpontjai E, F, G, H. Mekkora az ábrán látható $APCQ$ négyszög területe?



5. Egy 250 m kerületű körpályán három gyalogos egy pontból egyszerre indul el, sebességük rendre óránként $5\,km$, $4\,km$, ill. $3\,km$.

Mennyi idő múlva lesznek ismét együtt a starthelyen?

1991. évi verseny, 2. nap

1. Könnyű ellenőrizni, hogy $3^3+4^3+5^3 = 6^3$. Keress még legalább három ilyen példát, azaz három köbszámot, amelyek összege szintén köbszám!

2. Rendelkezésünkre áll tetszőleges számú egybevágó (egyforma) tégla. Gondolj ki módszert egy tégla testátlójának közvetlen (számolás nélküli) megmérésére!

3. Egy ország 20 városa között közvetlen légijáratokat létesítettek: egy járat mindig két várost köt össze és közben nem száll le. Bizonyítsd be, hogy ha a légijáratok száma 172, akkor bármely városból el lehet jutni repülővel bármely városba, legfeljebb egy átszállással!

4. *Kezdő* és *Válaszoló* a következő játékot játszák. Felírnak a papírra egy négyjegyű számot, *Kezdő* ennek kiválasztja bármelyik, nullától különböző számjegyét és kivonja a számból. *Válaszoló* az így kapott eredmény tetszőleges, nullától különböző számjegyét kiválasztja és kivonja belőle. Ezután ismét a *Kezdő* jön, hasonló műveletekkel, és így tovább. Az nyer, aki először 0-t kap.

Ki győz, ha 1991 a kiinduló szám? És ha 1990?

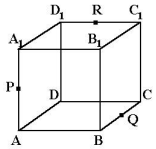
1992. évi verseny, 1. nap

1. Egy férfi így szólt az öccséhez: Most kétszer annyi idős vagyok, mint te voltál akkor, amikor én annyi idős voltam, mint te vagy most. Amikor te annyi idős leszel, mint én vagyok most, akkor akkor ketten együtt 63 évesek leszünk. Hány évesek most külön-külön?

2. A síkon az A, B, C és D pontok egy konvex négyszög csúcsai. A sík mely P pontjára igaz, hogy a négy adott ponttól mért távolságának összege a lehető legkisebb?

3. Melyek azok a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok, amelyek egyenlőek számjegyeik összegének 19-szeresével?

4. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka lapjainak átlója 2 egység. P, Q, R a megfelelő élek felezőpontjai. Számítsuk ki annak a síkidomnak a kerületét, amelyet a kocka a P, Q, R pontokra illesztett síkból kimetsz!

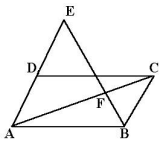


5. Egy szabályos hatszög csúcsainak kiszínezésére két szín áll rendelkezésünkre. Hányféleképpen színezhetjük ki a csúcsokat, ha minden csúcsot kiszínezünk, de azokat a színezéseket nem tekintjük különbözőnek, amelyeket a hatszög elforgatásával egymásba vihetünk át?

1992. évi verseny, 2. nap

1. Melyik n pozitív egész számra igaz, hogy az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeg értéke olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei egyenlők?

2. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 4, BC oldala 2 egység, DAB szöge $60°$. Tudjuk, hogy $DE = 2$ egység. Mekkora az FB szakasz?



3. Egy háromszög belsejében felveszünk néhány pontot. A felvett pontokat egymással és a háromszög csúcsaival úgy kötjük össze egyenes szakaszokkal, hogy az összekötő szakaszok a háromszög belsejében ne messék egymást és a háromszöget „kis” háromszögekre bontsák. Igazoljuk, hogy a kis háromszögek száma mindig páratlan!

4. Legfeljebb hány 0-ra végződhet egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol $n > 0$ egész?

1993. évi verseny, 1. nap

1. Az első 20 pozitív egész összegében meg lehet-e változtani néhány szám előjelét úgy, hogy az összeg 100 legyen? És az első 18 pozitív szám összegére igaz-e a megfelelő állítás?

2. Egy háromszögről a következőket tudjuk. Az egyik szögfelezője a szemközti oldallal 78°-os szöget zár be, egy másik szögfelezővel pedig 60°-os szöget alkot. Mekkorák a háromszög szögei?

3. Két kerékpáros egymással szemben 10 órakor indult A-ból és B-ből. Mindkettő állandó sebességgel haladt. Az első egy órakor ért B-be, a másik háromnegyed kettőkor A-ba. Hány órakor találkoztak A és B között?

4. Fel lehet-e darabolni egy kockát 20 kockára? És 50 darab kockára?

5. Egy A pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

1993. évi verseny, 2. nap

1. Mennyi lesz a következő tört nevezője, ha az összes lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük: $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100}{2^{50}\cdot3^{50}}$?

2. Tetszőlegesen választunk egy háromjegyű számot és ebből kiindulva képezzük a következő sorozatot: a számból kivonjuk a számjegyei összegét, az eredmény a sorozat második tagja. Ezután a második tag számjegyeit adjuk össze és az eredményt kivonjuk a második tagból, így kapjuk a sorozat harmadik tagját; és így tovább. Szerepel-e a sorozat tagjai között a 9?

3. Egy téglalap átlójának felező merőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

4. Hány egyenest határozhat meg a síkon 6 pont? Hány síkot határozhat meg a térben 6 pont? Mindkét kérdésnél az összes lehetséges esetet vizsgáld meg!

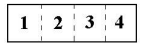
1994. évi verseny, 1. nap

1. Lehet-e négy egymást követő pozitív egész szám összege egy egész szám négyzete? Állításodat indokold!

2. Egy kocka éle 1, lapátlója a, testátlója b hosszúságú. Hány különböző olyan háromszög van, amelynek oldalainak hossza az 1, a és b számok közül kerülnek ki? Ezek közül hány egyenlő szárú és hány egyenlő oldalú?

3. Egy szimmetrikus (egyenlő szárú) trapézról tudjuk, hogy két átlója merőleges egymásra. A trapéz középvonalának (a két szár felezőpontját összekötő szakasznak) a hossza 2 egység. Mekkora a trapéz területe?

4. Egy szalag négy egybevágó négyzetből áll, ezeket így megjelöltük:



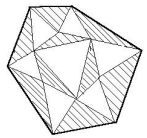
A szalagot a szaggatott vonalak mentén összehajtjuk egy négyzetté, és letesszük az asztalra. Hányféle különböző sorrendben következhetnek ekkor az 1, 2, 3, 4 számok?

5. Mely számok elégítik ki egyszerre a következő két egyenlőtlenséget: $|x| \leq x$ és $2x - 1 > 3$?

1994. évi verseny, 2. nap

1. Egy derékszögű trapéz egyik alapja és hosszabbik szára 4 egység. A 4 egység hosszú alapon fekvő derékszögű csúcsból induló átló 30°-os szöget zár be az ugyanebből a csúcsból induló szárral. Mekkora a trapéz középvonala?

2. Az ábrán látható hatszöget háromszögekre bontottuk úgy, hogy a következő két tulajdonság igaz: a) két háromszögnek vagy van közös oldala — ekkor az egyik háromszög fehér, a másik vonalazott — vagy csak közös csúcsa van, vagy nincs közös pontja; b) a hatszög mindegyik oldala egy vonalazott háromszög egyik oldala.



Fel lehet-e ugyanígy háromszögekre bontani egy konvex ötszöget?

3. Milyen k egész számra van olyan x és y egész szám, hogy a következő két egyenlőség egyszerre teljesül: $kx + y = 2$, $x - y = 3$?

4. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

1995. évi verseny, 1. nap

1. Melyik az a tízes számrendszerben felírt ötjegyű egész szám, amelyre igaz, hogy ha a szám végére írunk egy 1-est, akkor 3-szor akkora számot kapunk, mint ha az elejére írunk egy 1-est?

2. Adott egy konvex tízszög. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a tízszög csúcsai közül kerülnek ki, de a háromszögnek nincs közös oldala a tízszöggel?

3. Az n és az $n+1$ szám tízes számrendszerbeli alakjáról tudjuk, hogy számjegyeik összege páratlan. Hány ilyen n szám van az első 1000 pozitív egész szám között?

4. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AC = BC$ és $ACB\angle = 80°$. A háromszög belsejében egy P pontot úgy vettünk fel, hogy $PBA\angle = 30°$ és $PAB\angle = 10°$. Bizonyítsuk be, hogy $APC\angle = 70°$!

5. „Kockás" fehér papíron 40 kis négyzetet pirosra festettünk. Igaz-e, hogy mindig ki lehet jelölni a 40 közül 10 piros négyzetet úgy, hogy semelyik kettőnek sincs közös pontja (még közös csúcsa sem!)?

1995. évi verseny, 2. nap

1. Egy tízes számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyei összegének 17-szeresével. Melyik lehet ez a szám?

2. Melyik az az öt szám, amelyeket páronként összeadva a következő számokat kapjuk eredményül: 3, 5, 6, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 17?

3. Figyeljük meg a következő egyenlőségeket:

$$1 + 2 = 3,$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8,$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.$$

Általánosítsunk és bizonyítsunk! (Azaz: az egymást követő pozitív egészek összegének két szomszédos négyzetszám közé eső szeletét osszuk két csoportra úgy, hogy a csoportban lévő számok összege egyenlő legyen!)

4. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

1996. évi verseny, 1. nap

1. Lehet-e $172^{1996} + 7$ egy egész szám négyzete?

2. Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot 3 négyzet?

3. Az ABC háromszög C csúcsából induló magasságvonal és súlyvonal a C csúcsnál levő szöget három egyenlő részre bontja. Mekkorák a háromszög szögei?

4. Mindegyik háromjegyű pozitív egész számot elosztjuk a számjegyeinek összegével. Melyikre lesz legnagyobb a hányados?

5. Az, 1, 2, 3, ..., 8, 9 számokat 3 hármas csoportra bontjuk és kiszámítjuk mindegyik csoportban a számok szorzatát. Igazoljuk, hogy a legnagyobb szorzat legalább 72.

1996. évi verseny, 2. nap

1. Melyek azok a tízes számrendszerbeli négyjegyű négyzetszámok, amelyeknek első két jegye is és utolsó két jegye is azonos számjegy ($\overline{aabb}$ alakú)?

2. Az iskolában az egyik osztály bált rendezett, ezen összesen 42 fiú és lány vett részt. Az első lány 7 fiúval táncolt, a második 8-cal, a harmadik lány 9-cel és így tovább, végül az utolsó lány az összes fiúval táncolt. Hány fiú és hány lány vett részt a bálon?

3. Adott a síkon három, nem egy egyenesen levő pont, A, B és C. Rendelkezésünkre áll egy egyélű vonalzó, amivel két ponton át egyenest tudunk húzni és adott távolságot adott egyenesre át tudunk másolni (körzőnk nincs!). Húzzunk párhuzamost A-n keresztül a BC egyenessel!

4. Adott egy 3-nál nagyobb p prímszám és tudjuk, hogy p-nek egy hatványa 20 jegyű szám. Igazoljuk, hogy a 20 számjegy között van legalább 3 azonos!

1997. évi verseny, 1. nap

1. Van-e olyan egész szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul?

2. Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög területének hányad része az AEH háromszög területe?

3. Igazold, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}$ összeg nagyobb 5-nél, de kisebb 10-nél!

4. Határozd meg a 7^{9^9} szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó két számjegyét!

5. Három egyenlő sugarú körvonal úgy helyezkedik el a síkon, hogy mindegyik áthalad a másik kettő középpontján. A három körlap közös részének a területe kisebb, vagy nagyobb egy kör területének negyed részénél?

1997. évi verseny, 2. nap

1. Van-e olyan legalább kétjegyű csupa 1-es számjegyből álló tízes számrendszerbeli természetes szám, amelyik egy pozitív egész szám négyzete?

2. Hány részre bonthatja fel a síkot egy négyzet és egy körvonal? Minden lehetséges esetet vizsgálj meg!

3. Igazoljuk, hogy 7 páratlan egész kitevőjű hatványához 1-et adva, 8-cal osztható számot kapunk!

4. Egy sorozatot a következő módon képezünk. A sorozat első tagja 1997. Minden következő tagot úgy kapunk, hogy az előző tagból kivonjuk a számjegyeinek összegét (pl. $1997, 1997-26=1971, \ldots$) Mi lesz a sorozat első olyan tagja, amelyik egyjegyű szám?

1998. évi verseny, 1. nap

1. Három pozitív egész szám összege egyenlő a három szám szorzatával. Mik lehetnek ezek a számok? Az összes megoldást keresd meg!

2. Egy húrtrapézt az egyik átlója két egyenlőszárú háromszögre bont. Számítsuk ki a trapéz szögeit!

3. Igaz-e, hogy a következő számok mindegyike felírható két, egymást követő egész szám szorzataként?

12
1122
111222
11112222
.....

4. Egy derékszögű háromszög oldalainak hosszát összeszoroztuk, és pontosan kétszeresét kaptuk annak, amit akkor kaptunk, amikor a háromszög magasságainak hosszát szoroztuk össze. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

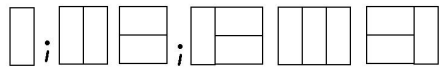
5. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_8$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_8$ számok. Ezekből képezzük az összes a_i+b_j alakú számot ($i, j = 1, 2, \ldots, 8$). Mutassuk meg, hogy az így kapott 64 számot 8 csoportra lehet bontani úgy, hogy a számok összege mind a 8 csoportban ugyanannyi!

1998. évi verseny, 2. nap

1. Hány olyan (x, y) számpár van, ahol $x<0$, $y>0$, x és y egészek, továbbá kielégítik a következő egyenletet: $111x-37y+1998=0$.

2. Adott egy szakasz, amelyről tudjuk, hogy egy szabályos tizenkétszög egy oldala. Szerkesszük meg a sokszög köré írható sugarát! (Elég leírni a szerkesztés menetét!)

3. A dominók 1×2-es téglalapok. Egybevágó dominókból rakunk ki $n\times 2$-es téglalapokat. Például az 1×2-est egyféleképpen, a 2×2-est kétféleképpen, a 3×2-est háromféleképpen lehet kirakni:



Hányféleképpen lehet kirakni a 10×2-es és 11×2-es téglalapokat?

4. Két különböző kétjegyű prímszámot egymás után írtunk, és az így kapott négyjegyű szám osztható a két prímszám számtani közepével. Mik lehetnek a kétjegyű prímszámok?

1999. évi verseny, 1. nap

1. Mi az utolsó két számjegye a 7^{1999} hatvány értékének?

2. A metró egyik mozgólépcsőjén felfelé szaladva 30 lépcsőt lépünk. Ugyanezen a lépcsőn, ugyanekkora sebességgel lefelé haladva 150 lépcsőfokot lépünk. Hány lépcsőfokot kellene lépni, ha ugyanezen a lépcsőn ugyanekkora sebességgel mennénk felfelé akkor, amikor a mozgólépcső áll?

3. Az $ABCD$ téglalapot egy négyzetrácsos füzetben rajzoltuk meg a rácsegyenesek mentén, $AB = 12$ egység, $BC = 4$ egység. A téglalap CD oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja E, a D-hez közelebbi harmadolópontja F. Mekkora az ACD, AED és AFD szögek összege?

4. Egy darab papírt felvághatunk 8 vagy 12 darabra, a kapott darabok bármelyikét újra felvághatjuk 8 vagy 12 darabra, és így tovább. Elérhető-e néhány ilyen darabolással, hogy 60 papírdarabunk legyen? És a 65-öt elérhetjük-e?

5. Adjuk meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyeknek a négyzete három azonos, 0-tól különböző számjegyre végződik!

1999. évi verseny, 2. nap

1. Melyik az az egész szám, amelyik a 328-nál a számjegyei összegével kisebb?

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának a felezéspontja D. Az ADC háromszögbe írt kör CD oldalon lévő E érintési pontja felezi a CD oldalt. Mekkorák az ABC háromszög hegyesszögei?

3. Két település közötti úton, amelyen nincs vízszintes szakasz, csak emelkedőkből és lejtőkből áll, autóbuszjárat közlekedik. Az emelkedőn az autóbusz 40 km/óra, a lejtőn 60 km/óra sebességgel halad. A két település közti utat az autóbusz oda és vissza 2 óra alatt teszi meg (nem számítva a várakozási időt). Milyen messze van egymástól a két település?

4. Egy szabályos hatszög középpontján három olyan szimmetriatengely halad át, amely a szemközti csúcspárokat köti össze. Igazoljuk, hogy bárhol is veszünk fel egy P pontot a hatszög kerületén, ennek a három szimmetriatengelytől mért távolságai közül a két rövidebbik összege egyenlő a hosszabbikkal!

2000. évi verseny, 1. nap

1. Hány éves Marci és az öccse Dani, ha tudjuk, hogy Marci életkorának négyzetéhez hozzáadva Dani életkorát, 176-ot kapunk, ha pedig Dani életkorának négyzetéhez adjuk Marci életkorát, akkor 62 adódik?

2. Egy $60°$-os szög mindkét szárát érinti egy 2 egység sugarú kör. Milyen messze van a kör középpontja a szög csúcsától?

3. Andi és Bence a következő „számkitalálós” játékot játszák. Andi gondol egy páros számra, majd a következő lépéseket végzi: a számot megszorozza 2-vel, az eredményhez 1-et ad, ezután a kapott eredményt szorozza 2-vel, majd az így kapott számhoz 1-et ad, és így tovább. A leírt műveletet annyiszor végzi el Andi, ahányszor akarja, majd a végeredményt megmondja Bencének. Bence rövid gondolkodás után kitalálja, hányszor végezte el Andi a leírt lépéseket, és milyen számra gondolt. Magyarázzuk meg Bence gondolatmenetét!

4. Egy szabályos 10-szög összes oldalát és átlóját meghúztuk. Hány olyan háromszög keletkezett így, amelynek csúcsai a 10-szög csúcsai közül valók?

5. Igaz-e a következő állítás: egy konvex négyszög bármely belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege kisebb, mint a négyszög kerülete?

2000. évi verseny, 2. nap

1. Négyzetszám-e a következő kivonás eredményeként kapott szám:

$$11111112222222 - 3333333?$$

2. Melyik az a három prímszám, amelyek szorzata 7-szerese az összegüknek?

3. Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak ($AB > CD$) és az AC, BD átlók metszéspontja P. Tudjuk, hogy az ACD háromszög területe 5 egység, a PCD háromszög területe pedig 1 egység. Mekkora a trapéz területe?

4. Ketten, A és B a következő játékot játszák: egy sorban $-$ jelek vannak írva, A először egy vagy két szomszédos $-$ jelből $+$ jelet csinál, ezután B teszi ugyanezt, majd megint A lép, és így tovább. Az nyer, aki az utolsó $-$ jelből $+$ jelet csinál. Ki nyer, ha eredetileg 9 $-$ jel van a sorban, és ha 10 $-$ jel van egy sorban? Milyen stratégiát követ a győztes?

2001. évi verseny, 1. nap

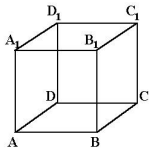
1. Előállítható-e 2001 két egész szám négyzetének összegeként?

2. Egy társaság kiránduláshoz autót bérelt 22 000 Ft-ért. Az elutazáskor még egy fő csatlakozott hozzájuk, ezért mindenkinek 200 Ft-tal kevesebbet kellett fizetni az autóért. Hány tagú volt eredetileg a társaság, ha mindenki ugyanannyit fizetett?

3. Az ABC háromszögben $AB = BC$, és az ABC szög $80°$-os. A P pont a háromszögön kívül úgy helyezkedik el, hogy a PAC szög $10°$-os és a PCA szög $30°$-os. Mekkora a BPA szög?

4. Mennyi a legnagyobb közös osztója az $A = 2001^{2000} + 2000^{2001}$ és a $B = 2000 \cdot 2001$ számoknak?

5. Az $ABCDAA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 1 cm. Egy pók az A csúcsban ül és másodpercenként 1 cm-t tud mászni a kocka felületén. Határozzuk meg a kocka felületének azt a részét, amelyet 2 másodperc alatt a pók sehogyan sem tud elérni!



2001. évi verseny, 2. nap

1. Ha az $\frac{1}{3}$ tört számlálóját és nevezőjét megnöveljük a nevező értékével, akkor kétszer akkora számot kapunk. Keressünk olyan törtet, amely két pozitív egész szám hányadosa, és

a) 3-szorosára,

b) 5-szörösére

nő, ha a nevezőjét hozzáadjuk a számlálójához és a nevezőjéhez is!

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben a P és Q pontok az AB oldalt, az R és S pontok a CD oldalt 3 egyenlő részre osztják. Hányszorosa az $ABCD$ négyszög területe a $PQRS$ négyszög területének?

3. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet teljes négyzet!

4. Hány olyan n szám van az első kétezer pozitív egész szám között, amelyre igaz, hogy az n és az $n + 1$ szám számjegyeink összege is páratlan szám?